

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 19/01/15

- (1) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, tali che $\int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g = 100$. Preso $a > 0$ e posto

$$F(x, y) = f(-2y)g(ax + 3y)$$

stabilire se F è integrabile su \mathbb{R}^2 , e se sì, calcolare

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} F .$$

Sol.: La trasformazione $\Phi(x, y) = (-2y, ax + 3y)$ è una trasformazione lineare invertibile che ha per determinante $2a$. Inoltre, applicando il teorema di Tonelli, si ha che la funzione $f(u)g(v)$ è integrabile su \mathbb{R}^2 , e ne segue che F è integrabile su \mathbb{R}^2 e vale

$$100 = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)d\mu(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} F(x, y)2ad\mu(x, y)$$

da cui

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} F = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{100}{2a} = +\infty .$$

- (2) Sia E un insieme stellato rispetto all'origine in \mathbb{R}^2 , cioè tale che per ogni $x \in E$ si abbia anche che il segmento $\overline{0x} \subset E$. Per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$ si ponga

$$E_{\vartheta} = \{r > 0 | (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \in E\} .$$

Provare che se E è misurabile in \mathbb{R}^2 , allora la funzione

$$f(\vartheta) = \mu_1(E_{\vartheta})$$

è misurabile su $[0, 2\pi]$. Esprimere $\mu_2(E)$ in termini di f . Qui μ_k indica la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^k , $k = 1, 2$.

Sol.: Considerando il diffeomorfismo dato dalle coordinate polari $F : (x, y) \mapsto (r, \vartheta)$, E_{ϑ} è la ϑ -sezione dell'insieme $F(E)$, ed essendo E stellato, E_{ϑ} un intervallo con primo estremo in 0 e di lunghezza $f(\vartheta)$. La misurabilità di $f(\vartheta)$ segue dalla misurabilità di $F(E)$. Si ha

$$\begin{aligned} \mu_2(E) &= \int_{(0, +\infty) \times (0, 2\pi)} \chi_{F(E)}(r, \vartheta) r d\mu_2(r, \vartheta) = \\ &= \int_{(0, 2\pi)} d\mu_1(\vartheta) \int_{(0, f(\vartheta))} r d\mu_1(r) = \int_{(0, 2\pi)} \frac{f^2(\vartheta)}{2} d\mu_1(\vartheta) . \end{aligned}$$

(3) Sia a_n una successione di numeri reali, sia

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e si ponga

$$f_n(x) = 2^n \varphi(2^n(x - a_n)), \quad x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$$

Stabilire se esiste, e in quale senso,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

e se vale

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Sol.: Si prova che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0, \quad \text{in misura}.$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$

$$\{|f_n(x)| > \varepsilon\} = \{-(2^n(x - a_n))^2 > \log(2^{-n}\varepsilon)\}$$

ovvero

$$\{|f_n(x)| > \varepsilon\} = \{|x - a_n| < 2^{-n} \sqrt{\log(2^n \varepsilon^{-1})}\}$$

da cui

$$\mu(\{|f_n(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

D'altro canto

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \sqrt{\pi} \quad \text{per ogni } n.$$